

Extrema und Wendepunkte

Spickzettel Aufgaben Lösungen **PLUS** Lernvideos

Extrempunkte

Stellst du dir den Graphen einer Funktion f als Gebirge vor, dann sind die Hochpunkte gerade die Spitzen der Berge. Sie sind die Punkte eines Graphen, in denen sich die Steigung von positiv zu negativ ändert. Analog dazu kannst du dir die Tiefpunkte als die tiefsten Stellen in den Tälern vorstellen. Dort ändert sich die Steigung von negativ zu positiv. Daher nimmt die Funktion in diesen Punkten ihr lokales Maximum bzw. Minimum an, global betrachtet, muss dies aber nicht zwangsweise der größte bzw. kleinste Funktionswert sein.

Damit es sich bei der Stelle x_E um eine Extremstelle handelt, müssen zwei Kriterien erfüllt sein:

1. **Notwendiges Kriterium:** $f'(x_E) = 0$
2. **Hinreichendes Kriterium:** Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten
 1. Wert der zweiten Ableitung: $f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ An der Stelle x_E liegt ein Hochpunkt des Graphen von f .
 $f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ An der Stelle x_E befindet sich ein Tiefpunkt des Graphen von f
 2. Vorzeichen-Wechsel der ersten Ableitung: Ist der Wert der ersten Ableitung von f vor der Stelle x_E positiv und nach x_E negativ, so liegt in x_E ein Hochpunkt des Graphen.
Umgekehrt: Ist der Wert der ersten Ableitung von f vor der Stelle x_E negativ und nach x_E positiv, so liegt in x_E ein Tiefpunkt des Graphen.

Berechnung

Die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen einer Funktion f kannst du wie folgt berechnen:

1. Bilde die erste und zweite Ableitungsfunktion von f
2. Notwendiges Kriterium anwenden: $f'(x) = 0$ setzen. Dadurch erhältst du mögliche Extremstellen x_E
3. Hinreichendes Kriterium überprüfen: $f''(x_E)$ berechnen.
4. y -Koordinaten: $f(x_E)$ berechnen

Beispiel

$$f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \quad f''(x) = 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 \cdot x = 0$$

$$x_E = 0$$

$\Rightarrow$ An der Stelle x_E liegt möglicherweise ein Extrempunkt des Graphen von f .

$$f''(x_E) = 2 > 0 \Rightarrow \text{An der Stelle } x_E = 0 \text{ liegt ein Tiefpunkt des Graphen von } f.$$

$$f(x_E) = f(0) = 0$$

Insgesamt folgt, dass der Graph von f einen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T(0 \mid 0)$ besitzt. Weitere Extrempunkte gibt es nicht.

Wendepunkte

Erklärung

Wendepunkte sind die Punkte des Graphen von f , in denen der Graph seine Krümmung ändert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine Wendestelle von f eine Extremstelle der ersten Ableitungsfunktion f' ist. Dementsprechend gelten hierfür ebenfalls die beiden Kriterien, wobei hier aber alles eine Ebene nach oben gesetzt wird:

1. **Notwendiges Kriterium:** $f''(x_W) = 0$
2. **Hinreichendes Kriterium:** Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten
 1. Wert der dritten Ableitung: $f'''(x_W) \neq 0$
 2. Vorzeichen-Wechsel der zweiten Ableitung: Ist der Wert der zweiten Ableitung von f vor der Stelle x_W positiv und nach x_W negativ bzw. umgekehrt, so handelt es sich bei x_W tatsächlich um eine Wendestelle



Berechnung

Die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen einer Funktion f kannst du wie folgt berechnen:

1. Bilde die zweite und dritte Ableitungsfunktion von f
2. Notwendiges Kriterium anwenden: $f''(x) = 0$ setzen. Dadurch erhältst du mögliche Extremstellen x_W
3. Hinreichendes Kriterium überprüfen: $f'''(x_W)$ berechnen.
4. y -Koordinaten: $f(x_W)$ berechnen